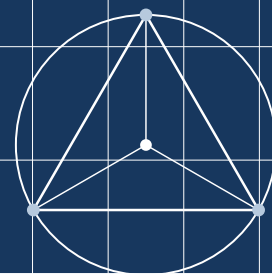


TẠP CHÍ TRI THỨC TRẺ

APMO 2026

ĐỀ BÀI VÀ LỜI GIẢI

THÁNG 3 NĂM 2026



Mục lục

0.1 Lời giải 2

0.2 Lời giải 3

0.3 Một cách giải khác 4

0.4 Lời giải 5

0.5 Lời giải 7

0.6 Lời giải 9

Bài toán 1

Tìm tất cả các bộ bốn số nguyên dương (a, p, m, o) với $o \geq 2$ thỏa mãn

$$a! + p! = m^o + 26.$$

Đáp số. $(a, p, m, o) \in \{(4, 3, 2, 2), (3, 4, 2, 2), (5, 3, 10, 2), (3, 5, 10, 2)\}.$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq p$. Nếu $p \geq 4$ thì $4 \mid a!$ và $4 \mid p!$, nên $m^o = a! + p! - 26 \equiv 2 \pmod{4}$. Suy ra $v_2(m^o) = 1$. Nhưng $v_2(m^o) = o v_2(m)$, vì thế $o = 1$, trái với giả thiết. Do đó chỉ cần xét $p = 1, 2, 3$.

Trường hợp $p = 1$. Khi đó $a! = m^o + 25$. Hiển nhiên $a \geq 5$. Vì $5 \mid a!$ nên $5 \mid m^o$, do đó $5 \mid m$; đồng thời xét modulo 2 cho thấy m lẻ. Nếu o chẵn thì $m^o + 25 \equiv 2 \pmod{4}$, vô lý. Vì $o \geq 2$, suy ra $o \geq 3$.

Do $5^3 \mid m^o$, ta có $a! \equiv 25 \pmod{125}$, hay $v_5(a!) = 2$. Theo công thức Legendre,

$$v_5(a!) = \left\lfloor \frac{a}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{25} \right\rfloor,$$

nên $10 \leq a \leq 14$. Mặt khác, lần lượt với $a = 10, 11, 12, 13, 14$, số dư của $a!$ modulo 125 là 50, 50, 100, 50, 75, không số nào bằng 25. Mâu thuẫn.

Trường hợp $p = 2$. Khi đó $a! = m^o + 24$ và $a \geq 5$. Nếu $a = 5$ thì $m^o = 96 = 2^5 \cdot 3$, không thể là lũy thừa bậc $o \geq 2$. Nếu $a \geq 6$ thì $m^o = a! - 24 \equiv 3 \pmod{9}$. Vì số mũ của 3 trong m^o phải chia hết cho o , trong khi $v_3(m^o) = 1$, ta buộc phải có $o = 1$, mâu thuẫn.

Trường hợp $p = 3$. Khi đó $a! = m^o + 20$ và $a \geq 4$.

Nếu $a = 4$ thì $m^o = 4$, do đó $m = o = 2$. Nếu $a = 5$ thì $m^o = 100$, do đó $m = 10$ và $o = 2$.

Giả sử $a \geq 6$. Từ $24 \mid a! = m^o + 20$ suy ra m chẵn. Nếu $4 \mid m$ hoặc $o \geq 3$ thì $m^o + 20 \equiv 4 \pmod{8}$, vô lý. Trường hợp còn lại là $o = 2$ và $m \equiv 2 \pmod{4}$; khi ấy $m^o + 20 = m^2 + 20 \equiv 4 + 20 \equiv 8 \pmod{16}$, cũng vô lý vì $16 \mid a!$.

Đổi vai trò của a và p , ta thu được đúng bốn nghiệm đã nêu.

Bài toán 2

Cho số nguyên $n \geq 2$. Gọi $A_1, A_2, \dots, A_{2^n}$ là 2^n tập con của một tập có n phần tử, được sắp theo một thứ tự tùy ý. Chứng minh rằng

$$|A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| + \dots + |A_{2^n-1} \cap A_{2^n}| + |A_{2^n} \cap A_1| \geq 2^{n-2}.$$

Lời giải

Các chỉ số dưới đây được hiểu theo modulo 2^n . Đặt

$$a_i = |A_i \cap A_{i+1}|, \quad c_i = |A_{i-1}| + 2|A_i| + |A_{i+1}| - 2n.$$

Ta có $a_i = |A_i| + |A_{i+1}| - |A_i \cup A_{i+1}| \geq |A_i| + |A_{i+1}| - n$, nên $a_{i-1} + a_i \geq c_i$.

Nếu $c_i \geq 1$ thì, do các đại lượng đều nguyên,

$$a_{i-1} + a_i \geq \frac{c_i + 1}{2}. \quad (1)$$

Khi $c_i < 0$, bất đẳng thức (1) hiển nhiên đúng. Ta chỉ còn xét $c_i = 0$.

Nếu một trong hai bất đẳng thức dùng để ước lượng a_{i-1}, a_i là nghiêm thì $a_{i-1} + a_i > c_i = 0$, nên (1) đúng. Nếu cả hai đều là đẳng thức thì $|A_{i-1} \cup A_i| = |A_i \cup A_{i+1}| = n$. Bởi vậy, cả A_{i-1} và A_{i+1} đều chứa phần bù của A_i . Hai tập này khác nhau, nên ít nhất một trong chúng khác phần bù của A_i ; do đó nó có giao khác rỗng với A_i . Suy ra $a_{i-1} + a_i \geq 1$, và (1) vẫn đúng.

Cộng (1) theo i , ta được

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2^n} a_i &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2^n} (a_{i-1} + a_i) \\ &\geq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2^n} (c_i + 1) \\ &= \sum_{i=1}^{2^n} |A_i| - 2^{n-1}n + 2^{n-2} \\ &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} - 2^{n-1}n + 2^{n-2} \\ &= 2^{n-1}n - 2^{n-1}n + 2^{n-2} \\ &= 2^{n-2}. \end{aligned}$$

Hoàn chứng minh bài toán.

Một cách giải khác

Xét một phần tử x của tập hợp. Khi đi một vòng qua dãy tuần hoàn $A_1, A_2, \dots, A_{2^n}$, số cặp liên tiếp mà x thuộc cả hai tập bằng số cặp liên tiếp mà x không thuộc tập nào. Thật vậy, có đúng 2^{n-1} tập chứa x và 2^{n-1} tập không chứa x ; đồng thời số lần chuyển từ “chứa” sang “không chứa” bằng số lần chuyển theo chiều ngược lại.

Do đó, nếu $\overline{A_i}$ là phần bù của A_i , tổng cần xét bằng

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2^n} (|A_i \cap A_{i+1}| + |\overline{A_i} \cap \overline{A_{i+1}}|). \quad (2)$$

Một số hạng trong (2) bằng 0 khi và chỉ khi $A_{i+1} = \overline{A_i}$. Hai số hạng liên tiếp không thể đồng thời bằng 0, vì khi đó $A_i = A_{i+2}$, trái với việc mọi tập con chỉ xuất hiện một lần. Vậy trong 2^n số hạng nguyên không âm của (2), có nhiều nhất 2^{n-1} số hạng bằng 0; các số hạng còn lại ít nhất bằng 1. Suy ra (2) ít nhất bằng 2^{n-2} .

Bài toán 3

Ký hiệu $\mathbb{R}_+$ là tập các số thực dương. Xác định tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}_+$,

$$|x - y| < |y - z| \iff |f(x) - f(y)| < |f(y) - f(z)|. \quad (1)$$

Đáp số. Tất cả các hàm $f(x) = ax + b$, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$.

Lời giải

Trước hết, mọi hàm $f(x) = ax + b$ với $a \neq 0$ đều thỏa mãn yêu cầu, vì $|f(u) - f(v)| = |a||u - v|$. Ta chứng minh đây là tất cả các nghiệm.

Từ giả thiết, bằng cách đổi vai trò của x và z , ta còn có

$$|x - y| > |y - z| \iff |f(x) - f(y)| > |f(y) - f(z)|.$$

Vì thế, trường hợp hai khoảng cách bằng nhau buộc hai khoảng cách ảnh cũng bằng nhau:

$$|x - y| = |z - y| \implies |f(x) - f(y)| = |f(z) - f(y)|. \quad (2)$$

Khẳng định 1. Hàm f đơn ánh.

Chứng minh. Giả sử $y \neq z$ nhưng $f(y) = f(z)$. Lấy $x = y$ trong giả thiết, do $|x - y| = 0 < |y - z|$ nên phải có $0 = |f(x) - f(y)| < |f(y) - f(z)| = 0$, vô lý.

Khẳng định 2. Hàm f bảo toàn trung điểm, tức là

$$f\left(\frac{x+z}{2}\right) = \frac{f(x) + f(z)}{2} \quad \text{với mọi } x, z > 0. \quad (3)$$

Chứng minh. Chỉ cần xét $x \neq z$. Đặt $y = (x+z)/2$. Vì $|x - y| = |z - y|$, từ (2) suy ra $|f(x) - f(y)| = |f(z) - f(y)|$. Mặt khác, Khẳng định 1 cho $f(x) \neq f(z)$. Trên trục số, điểm duy nhất cách đều hai điểm phân biệt $f(x), f(z)$ là trung điểm của chúng. Do đó (3) đúng.

Khẳng định 3. Hàm f liên tục trên $\mathbb{R}_+$.

Chứng minh. Trước hết, f bị chặn trên mỗi lân cận đủ nhỏ của một điểm bất kỳ. Thật vậy, cố định $y > 0$, chọn r sao cho $0 < r < y$ và đặt $z = y + r$. Nếu $|x - y| < r$ thì theo giả thiết,

$$|f(x) - f(y)| < |f(y) - f(z)|.$$

Vì vậy f bị chặn trên khoảng $(y - r, y + r)$.

Ta dùng (3) để chứng minh tính liên tục tại y . Chọn một khoảng đóng $[u, v] \subset \mathbb{R}_+$ chứa y ở bên trong và một hằng số $M > 0$ sao cho $|f(t)| \leq M$ với mọi $t \in [u, v]$. Với h đủ nhỏ và số nguyên dương k sao cho $y + 2^k h \in [u, v]$, áp dụng liên tiếp (3) cho ta

$$f(y + h) - f(y) = \frac{f(y + 2^k h) - f(y)}{2^k}.$$

Do đó

$$|f(y + h) - f(y)| \leq \frac{2M}{2^k}.$$

Khi $h \rightarrow 0$, ta có thể chọn $k \rightarrow \infty$ mà vẫn giữ $y + 2^k h \in [u, v]$. Suy ra $f(y + h) \rightarrow f(y)$, nên f liên tục tại y .

Từ (3), quy nạp theo phép chia đôi cho thấy với mọi số hữu tỉ nhị phân $r = k/2^m \in [0, 1]$,

$$f((1 - r)x + rz) = (1 - r)f(x) + rf(z). \quad (4)$$

Nhờ tính liên tục, (4) đúng với mọi $r \in [0, 1]$. Lấy hai điểm cố định $x_0 < z_0$, ta thấy đồ thị của f trên $[x_0, z_0]$ là đoạn thẳng nối $(x_0, f(x_0))$ và $(z_0, f(z_0))$. Các đoạn như vậy chồng lên nhau, nên tồn tại hai hằng số a, b sao cho

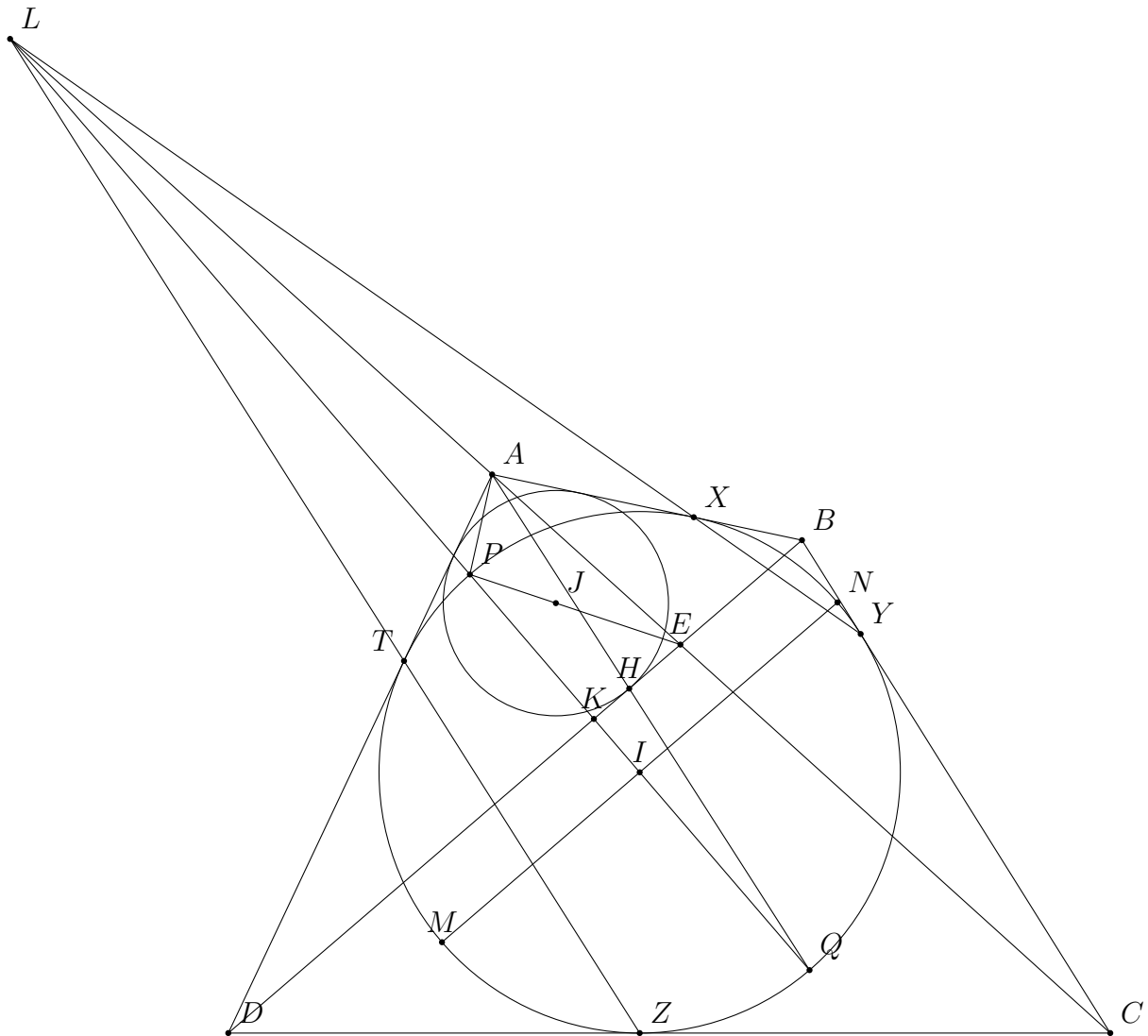
$$f(x) = ax + b \quad \text{với mọi } x > 0.$$

Cuối cùng, Khẳng định 1 cho $a \neq 0$. Vậy tất cả các nghiệm là $f(x) = ax + b$ với $a \neq 0$.

Bài toán 4

Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn ω có tâm I . Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E . Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABD . Tia EJ cắt ω tại P . Chứng minh rằng $PI \perp BD$.

Lời giải



Kẻ các đường kính MN và $P'Q$ của (I) sao cho $MN \parallel BD$ và $P'Q \perp BD$ ($P'A < QA$). X, Y, Z, T là tiếp điểm của (I) với AB, BC, CD, DA .

Ta có tính chất quen thuộc: XY, ZT, PQ đồng quy, gọi điểm đồng quy là L .

XY và ZT lần lượt là đường đối cực của B và D đối với (I) , do đó L là cực của BD đối với (I) .

Từ đây suy ra:

$$\overline{IK} \cdot \overline{IL} = \overline{IM}^2 = \overline{IN}^2 \text{ và } (LKP'Q) = -1.$$

Do đó K là trực tâm tam giác LMN . (1)

Từ $(LKP'Q) = -1$ suy ra:

$$\begin{aligned}\overline{KI} \cdot \overline{KL} &= \overline{KP'} \cdot \overline{KQ} \text{ (hệ thức Maclaurin)} \Rightarrow \frac{\overline{KI}}{\overline{KP'}} = \frac{\overline{KQ}}{\overline{KL}} \\ &\Rightarrow \frac{\overline{P'I}}{\overline{P'K}} = \frac{\overline{LQ}}{\overline{LK}} \\ &\Rightarrow (IKP') = (QKL). \quad (2)\end{aligned}$$

H là hình chiếu của J trên BD .

A là tâm vị tự ngoài của (J) và (I) nên A, J, I thẳng hàng và A, H, Q thẳng hàng.

Kẻ $Mx \parallel P'Q$, từ (1) và (2) suy ra:

$$J(IKP'H) = M(QKLx) = N(QLKI) = A(QLKI) = A(HEKJ) = J(HEKA) = J(IKEH)$$

Suy ra J, P', E thẳng hàng. Vậy P' trùng P , ta có đpcm.

Bài toán 5

Cho số nguyên dương n . Có $n(n+1)$ căn phòng được xếp thành một bảng gồm $(n+1) \times n$ ô. Giữa mỗi hai phòng kề nhau có một cánh cửa. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một số cửa để khóa sao cho tồn tại hai phòng S, G thỏa mãn:

- (i) S nằm ở hàng thứ nhất và G nằm ở hàng thứ $(n+1)$;
- (ii) có thể đi từ S đến G chỉ qua các cửa không khóa.

Đáp số. 2^{2n^2-2} .

Lời giải

Trước hết, tạm giả sử mọi cửa nối hai phòng trong cùng hàng đầu tiên hoặc cùng hàng cuối cùng đều không bị khóa. Gom tất cả các phòng ở hàng đầu thành một đỉnh A , và gom tất cả các phòng ở hàng cuối thành một đỉnh B . Ta được đồ thị $\mathcal{G}$ có

$$n(n-1) + 2 \text{ đỉnh} \quad \text{và} \quad n^2 + (n-1)^2 = 2n^2 - 2n + 1 \text{ cạnh.}$$

Các đỉnh còn lại là $v_{i,j}$ với $1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n$. Các cạnh dọc được ký hiệu $d_{i,j}$ với $1 \leq i, j \leq n$, còn các cạnh ngang là $e_{i,j}$ với $1 \leq i, j \leq n-1$. Cụ thể:

- $d_{1,j}$ nối A với $v_{1,j}$ và $d_{n,j}$ nối $v_{n-1,j}$ với B ;
- $d_{i,j}$ nối $v_{i-1,j}$ với $v_{i,j}$ khi $2 \leq i \leq n-1$;
- $e_{i,j}$ nối $v_{i,j}$ với $v_{i,j+1}$.

Mỗi trạng thái khóa-mở của các cửa đang xét tương ứng với một đồ thị con bao trùm $\mathcal{H}$ của $\mathcal{G}$: cạnh thuộc $\mathcal{H}$ khi và chỉ khi cửa tương ứng không khóa. Điều kiện bài toán trở thành: $\mathcal{H}$ có một đường đi từ A đến B .

Gọi $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ là tập các đồ thị con bao trùm của $\mathcal{G}$. Định nghĩa ánh xạ $f : \mathcal{S}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{G})$ bởi

$$\begin{aligned} d_{i,j} \in f(\mathcal{H}) &\iff d_{j,i} \notin \mathcal{H}, \\ e_{i,j} \in f(\mathcal{H}) &\iff e_{j,i} \notin \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Ta gọi $\mathcal{H}$ là *đạt được* nếu trong $\mathcal{H}$ có đường đi từ A đến B .

Khẳng định 1. Với mọi $\mathcal{H} \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$, ta có $f(f(\mathcal{H})) = \mathcal{H}$. Đặc biệt, f là một song ánh.

Chứng minh. Từ định nghĩa, $d_{i,j} \in \mathcal{H}$ khi và chỉ khi $d_{j,i} \notin f(\mathcal{H})$, tương đương $d_{i,j} \in f(f(\mathcal{H}))$. Lập luận tương tự đúng với các cạnh $e_{i,j}$.

Khẳng định 2. $\mathcal{H}$ đạt được khi và chỉ khi $f(\mathcal{H})$ không đạt được.

Chứng minh. Ký hiệu $\overline{d_{i,j}} = d_{j,i}$ và $\overline{e_{i,j}} = e_{j,i}$. Về hình học, phép $p \mapsto \bar{p}$ chính là: lấy cạnh đối ngẫu cắt p , rồi quay toàn bộ hình vuông một góc 90° để hai đỉnh biên lại trở thành A, B .

Ta dùng bổ đề phân cách phẳng quen thuộc sau: trong một lưới hình chữ nhật, đúng một trong hai khả năng xảy ra:

- có một đường gồm các cạnh đã chọn nối biên trên với biên dưới;
- có một đường trong lưới đối ngẫu, chỉ cắt các cạnh không được chọn, nối biên trái với biên phải.

Hai đường như vậy không thể đồng thời tồn tại vì chúng bắt buộc phải cắt nhau. Nếu đường thứ nhất không tồn tại, lấy hợp tất cả các ô và đỉnh đi được từ biên trên; phần biên ngoài của miền này chứa một đường liên tục từ biên trái đến biên phải, chứng minh sự tồn tại của đường thứ hai.

Áp dụng bổ đề cho tập cạnh của $\mathcal{H}$, rồi quay đường đối ngẫu 90° , ta thấy: nếu $\mathcal{H}$ có đường từ A đến B thì $f(\mathcal{H})$ không thể có đường từ A đến B .

Ngược lại, giả sử $\mathcal{H}$ không có đường từ A đến B . Gọi V_A là tập các đỉnh đi được từ A trong $\mathcal{H}$, và E là tập các cạnh của $\mathcal{G}$ có đúng một đầu mút thuộc V_A . Không cạnh nào của E thuộc $\mathcal{H}$. Tập cạnh đối ngẫu, sau khi quay,

$$\overline{E} = \{\overline{d_{i,j}} : d_{i,j} \in E\} \cup \{\overline{e_{i,j}} : e_{i,j} \in E\}$$

nằm trọn trong $f(\mathcal{H})$. Theo bổ đề phân cách, các cạnh này chứa một đường từ A đến B . Do đó $f(\mathcal{H})$ đạt được. Khẳng định 2 được chứng minh.

Gọi N là số đồ thị con bao trùm đạt được. Từ hai khẳng định trên,

$$\begin{aligned} N &= |\{\mathcal{H} : f(\mathcal{H}) \text{ đạt được}\}| \\ &= |\mathcal{S}(\mathcal{G})| - |\{\mathcal{H} : f(\mathcal{H}) \text{ không đạt được}\}| \\ &= 2^{2n^2-2n+1} - N. \end{aligned}$$

Suy ra $N = 2^{2n^2-2n}$.

Cuối cùng, ta trả lại trạng thái tùy ý cho các cửa nằm ngang trong hàng đầu và hàng cuối. Có tất cả $2(n-1)$ cửa như vậy, và trạng thái của chúng không ảnh hưởng đến việc tồn tại một đường đi từ một phòng ở hàng đầu đến một phòng ở hàng cuối. Vì thế số cách cần tìm là

$$2^{2n^2-2n} \cdot 2^{2n-2} = \boxed{2^{2n^2-2}}.$$