

CHUYÊN ĐỀ BẤT ĐẲNG THỨC

PHÉP ĐỔI BIẾN TRONG CHỨNG MINH MỘT BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Phép chuẩn hóa và ứng dụng bất đẳng thức AM-GM

TẠP CHÍ TRI THỨC TRẺ

Tháng 7 năm 2026

1 Bài toán mở đầu

Bài toán 1. Cho số nguyên dương n và các số thực $a_0, a_1, \dots, a_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn

$$\tan\left(a_0 - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(a_1 - \frac{\pi}{4}\right) + \dots + \tan\left(a_n - \frac{\pi}{4}\right) \geq n - 1. \quad (1)$$

Chứng minh rằng

$$\tan a_0 \tan a_1 \dots \tan a_n \geq n^{n+1}. \quad (2)$$

Thoạt nhìn, giả thiết là một bất đẳng thức về tổng, trong khi kết luận lại là một bất đẳng thức về tích. Cầu nối giữa hai dạng này không nằm ở những đánh giá riêng lẻ đối với từng góc, mà nằm trong chính cấu trúc của công thức tang hiệu. Đặc biệt, góc $\frac{\pi}{4}$ tạo ra hằng số 1, nhờ đó biểu thức lượng giác được đưa về một phân thức bậc nhất rất cân đối.

2 Phép chuẩn hóa chủ đạo

Đặt $t_i = \tan a_i$. Vì $a_i \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ta có $t_i > 0$. Công thức tang hiệu cho

$$\tan\left(a_i - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{t_i - 1}{t_i + 1} = 1 - \frac{2}{1 + t_i}. \quad (3)$$

Do đó, nếu đặt

$$u_i = \frac{1}{1 + t_i} = \frac{1}{1 + \tan a_i},$$

thì $0 < u_i < 1$, đồng thời giả thiết (1) tương đương với

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (1 - 2u_i) &\geq n - 1, \\ n + 1 - 2 \sum_{i=0}^n u_i &\geq n - 1, \\ \sum_{i=0}^n u_i &\leq 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Mặt khác,

$$t_i = \frac{1 - u_i}{u_i}. \quad (5)$$

Như vậy, toàn bộ phần lượng giác đã được tách khỏi bài toán. Điều còn lại là một bất đẳng thức đại số trên các số dương có tổng không vượt quá 1.

Bổ đề 1 (Bổ đề tích trên đơn hình). Cho số nguyên dương n và các số $u_0, u_1, \dots, u_n >$

0 thỏa mãn $u_0 + u_1 + \dots + u_n \leq 1$. Khi đó

$$\prod_{i=0}^n \frac{1-u_i}{u_i} \geq n^{n+1}. \quad (6)$$

Lời giải. Với mỗi $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, từ giả thiết ta có

$$1 - u_i \geq \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} u_j.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho n số dương ở vế phải, suy ra

$$1 - u_i \geq n \sqrt[n]{\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} u_j}. \quad (7)$$

Nhân $n+1$ bất đẳng thức (7), ứng với $i = 0, 1, \dots, n$, ta được

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^n (1 - u_i) &\geq n^{n+1} \left(\prod_{i=0}^n \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} u_j \right)^{1/n} \\ &= n^{n+1} \left(\prod_{j=0}^n u_j^n \right)^{1/n} \\ &= n^{n+1} \prod_{j=0}^n u_j. \end{aligned}$$

Chia hai vế cho tích dương $\prod_{j=0}^n u_j$, ta thu được (6). ■

Phép nhân ở trên là điểm quan trọng nhất của chứng minh: mỗi u_j bị loại khỏi đúng một tích và xuất hiện trong đúng n tích còn lại. Số mũ n này triệt tiêu với căn bậc n , còn hệ số n của AM-GM xuất hiện $n+1$ lần, tạo thành n^{n+1} .

3 Hai lời giải của bài toán

3.1 Lời giải thứ nhất: đưa về bổ đề đại số

Từ (4), các số $u_0, u_1, \dots, u_n$ thỏa mãn điều kiện của Bổ đề 1. Kết hợp (5) và (6), ta có

$$\tan a_0 \tan a_1 \dots \tan a_n = \prod_{i=0}^n \frac{1-u_i}{u_i} \geq n^{n+1}.$$

Vậy (2) được chứng minh.

3.2 Lời giải thứ hai: sử dụng trực tiếp biến đối xứng

Đặt

$$x_i = \tan\left(a_i - \frac{\pi}{4}\right) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Do $a_i - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, ta có $-1 < x_i < 1$. Giả thiết (1) trở thành

$$x_0 + x_1 + \dots + x_n \geq n - 1. \quad (8)$$

Từ công thức tang hiệu,

$$x_i = \frac{\tan a_i - 1}{\tan a_i + 1},$$

nên

$$\tan a_i = \frac{1 + x_i}{1 - x_i}. \quad (9)$$

Với mỗi chỉ số i , bất đẳng thức (8) cho

$$\begin{aligned} x_i &\geq n - 1 - \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} x_j, \\ 1 + x_i &\geq \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (1 - x_j). \end{aligned}$$

Vì $1 - x_j > 0$, áp dụng AM-GM cho n số ở vế phải, ta được

$$1 + x_i \geq n \sqrt[n]{\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (1 - x_j)}. \quad (10)$$

Nhân (10) theo tất cả các chỉ số i , rồi sử dụng đúng quy luật đếm số lần xuất hiện như trong chứng minh Bổ đề 1, ta suy ra

$$\prod_{i=0}^n (1 + x_i) \geq n^{n+1} \prod_{i=0}^n (1 - x_i).$$

Vì $1 - x_i > 0$, chia hai vế cho $\prod_{i=0}^n (1 - x_i)$ và dùng (9), ta có

$$\prod_{i=0}^n \tan a_i = \prod_{i=0}^n \frac{1 + x_i}{1 - x_i} \geq n^{n+1}.$$

Hai lời giải thực chất là hai cách nhìn của cùng một phép chuẩn hóa, bởi

$$u_i = \frac{1 - x_i}{2}.$$

Biến $x_i \in (-1, 1)$ làm nổi bật tính đối xứng của phân thức $\frac{1 + x_i}{1 - x_i}$, còn biến $u_i \in (0, 1)$

làm nổi bật điều kiện tổng $\sum u_i \leq 1$.

4 Phân tích chính xác dấu bằng

4.1 Trường hợp $n \geq 2$

Trong chứng minh của Bổ đề 1, dấu bằng đòi hỏi trước hết

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 1. \quad (11)$$

Đồng thời, với mỗi i , dấu bằng trong AM-GM ở (7) đòi hỏi các số u_j với $j \neq i$ bằng nhau. Vì có ít nhất ba biến, các điều kiện này suy ra

$$u_0 = u_1 = \cdots = u_n = \frac{1}{n+1}.$$

Theo (5),

$$\tan a_0 = \tan a_1 = \cdots = \tan a_n = n.$$

Do các góc đều thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = \arctan n.$$

4.2 Trường hợp biên $n = 1$

Đây là trường hợp cần được tách riêng. Đặt $\alpha = a_0 - \frac{\pi}{4}$ và $\beta = a_1 - \frac{\pi}{4}$. Khi đó $\alpha, \beta \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, nên $\cos \alpha \cos \beta > 0$, và

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

Vì $\alpha + \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, giả thiết $\tan \alpha + \tan \beta \geq 0$ tương đương với

$$\alpha + \beta \geq 0 \iff a_0 + a_1 \geq \frac{\pi}{2}.$$

Hàm tang đồng biến trên $(0, \frac{\pi}{2})$, do đó

$$\tan a_1 \geq \tan\left(\frac{\pi}{2} - a_0\right) = \frac{1}{\tan a_0}.$$

Suy ra $\tan a_0 \tan a_1 \geq 1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$a_0 + a_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Như vậy, khi $n = 1$, dấu bằng không chỉ xảy ra tại $a_0 = a_1 = \frac{\pi}{4}$, mà xảy ra với mọi cặp góc dương có tổng bằng $\frac{\pi}{2}$. Đây là chi tiết dễ bị bỏ sót nếu áp dụng máy móc điều kiện dấu bằng của trường hợp $n \geq 2$.

5 Dạng đại số tổng quát và các bài toán liên quan

Định lý 1 (Dạng đại số tổng quát). Cho số nguyên $m \geq 2$ và các số dương $t_1, t_2, \dots, t_m$ thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{1+t_i} \leq 1.$$

Khi đó

$$t_1 t_2 \cdots t_m \geq (m-1)^m.$$

Nếu $m \geq 3$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t_1 = t_2 = \cdots = t_m = m-1$. Nếu $m = 2$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t_1 t_2 = 1$.

Lời giải. Đặt $u_i = \frac{1}{1+t_i}$. Khi đó $t_i = \frac{1-u_i}{u_i}$ và $\sum_{i=1}^m u_i \leq 1$. Áp dụng Bổ đề 1 với $n = m-1$, ta được ngay kết luận. Điều kiện dấu bằng đã được phân tích trong Mục 4. ■

Định lý 1 cho thấy Bài toán 1 là một biểu hiện lượng giác của một nguyên lý đại số: nếu tổng các đại lượng $\frac{1}{1+t_i}$ không vượt quá 1, thì tích các t_i không thể quá nhỏ.

Bài toán 2 (Trường hợp ba biến). Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn

$$\frac{x-1}{x+1} + \frac{y-1}{y+1} + \frac{z-1}{z+1} \geq 1.$$

Chứng minh rằng $xyz \geq 8$.

Lời giải. Đặt

$$u = \frac{1}{1+x}, \quad v = \frac{1}{1+y}, \quad w = \frac{1}{1+z}.$$

Giả thiết tương đương với $u + v + w \leq 1$. Bởi vậy,

$$1 - u \geq v + w \geq 2\sqrt{vw},$$

$$1 - v \geq w + u \geq 2\sqrt{wu},$$

$$1 - w \geq u + v \geq 2\sqrt{uv}.$$

Nhân ba bất đẳng thức trên, ta được

$$(1-u)(1-v)(1-w) \geq 8uvw.$$

Do đó

$$xyz = \frac{(1-u)(1-v)(1-w)}{uvw} \geq 8.$$

Dấu bằng xảy ra khi $u = v = w = \frac{1}{3}$, tương đương với $x = y = z = 2$. ■

Bài toán 3 (Một hệ quả lượng giác bốn biến). Cho $a, b, c, d \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn

$$\tan\left(a - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(b - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(c - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(d - \frac{\pi}{4}\right) \geq 2.$$

Chứng minh rằng

$$\tan a \tan b \tan c \tan d \geq 81.$$

Lời giải. Đây là trường hợp $n = 3$ của Bài toán 1. Thật vậy, đặt $t_1 = \tan a, t_2 = \tan b, t_3 = \tan c, t_4 = \tan d$. Công thức (3) biến giả thiết thành

$$\frac{1}{1+t_1} + \frac{1}{1+t_2} + \frac{1}{1+t_3} + \frac{1}{1+t_4} \leq 1.$$

Theo Định lý 1,

$$t_1 t_2 t_3 t_4 \geq (4-1)^4 = 81.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\tan a = \tan b = \tan c = \tan d = 3$, hay $a = b = c = d = \arctan 3$.

6 Bình luận về phương pháp

- Vai trò của góc $\pi/4$.** Vì $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, công thức tang hiệu tạo ra phân thức $\frac{t-1}{t+1}$. Phân thức này lại viết được thành $1 - \frac{2}{1+t}$, đúng dạng cần thiết để chuyển giả thiết thành điều kiện tổng không vượt quá 1.
- Không được đánh giá riêng từng biến.** Từ $x_0 + x_1 + \dots + x_n \geq n-1$, không thể suy ra $x_i \geq \frac{n-1}{n+1}$ với mọi i . Chứng minh đúng phải khai thác đồng thời tất cả các biến, cụ thể là tách từng x_i , áp dụng AM-GM cho n biến còn lại rồi nhân các bất đẳng thức.
- Vì sao không nên áp dụng Jensen trực tiếp?** Nếu xét $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ trên $(-1, 1)$, thì

$$f''(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2}.$$

Đạo hàm cấp hai đổi dấu tại $x = 0$, nên f không lồi trên toàn khoảng $(-1, 1)$. Bởi vậy, một lập luận Jensen trực tiếp trên các x_i sẽ không hợp lệ nếu chưa có thêm điều kiện bảo đảm $x_i \geq 0$.

- Luôn kiểm tra trường hợp ít biến.** Khi $n = 1$, mỗi lần áp dụng AM-GM chỉ có một số hạng, nên không xuất hiện điều kiện các biến phải bằng nhau. Đây chính là nguyên nhân khiến tập hợp trường hợp dấu bằng rộng hơn trường hợp $n \geq 2$.

7 Kết luận

Bài toán mở đầu là một ví dụ điển hình cho việc một phép đổi biến phù hợp có thể làm lộ cấu trúc đại số ẩn sau biểu thức lượng giác. Hai lựa chọn

$$x_i = \tan \left(a_i - \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{và} \quad u_i = \frac{1}{1 + \tan a_i}$$

không cạnh tranh với nhau mà bổ sung cho nhau: biến x_i giữ được hình dáng đối xứng của công thức tang, còn biến u_i đưa bài toán về một đơn hình và làm cho phép áp dụng AM-GM trở nên tự nhiên. Quan trọng hơn, việc theo dõi đầy đủ điều kiện dấu bằng cho thấy trường hợp $n = 1$ cần được xử lý riêng. Đây là một thói quen cần thiết khi trình bày lời giải bất đẳng thức một cách chặt chẽ.

— HẾT —