

THÁCH THỨC HÀNG TUẦN

Số 49

Số đặc biệt đầu xuân Bính Ngọ

Bài 1. Cho bảng ô vuông 6×12 . Có bao nhiêu cách chia bảng thành 36 bảng con kích thước 1×2 hoặc 2×1 ?

Bài 2. Cho dãy số thực dương (a_n) thỏa mãn $\sum_{k=0}^n C_n^k a_k a_{n-k} = a_n^2, \forall n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh rằng (a_n) là một cấp số nhân.

Bài 3. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

i) $f(ab) = f(a)f(b)$, với mọi cặp số a, b không nguyên tố cùng nhau.

ii) $f(a), f(b), f(a+b-1)$ là độ dài các cạnh của một tam giác.

Bài 4. An và Bình chơi một trò chơi với hai đồng sỏi chứa lần lượt a và b viên sỏi, trong đó a, b là các số nguyên dương. Hai người chơi luân phiên, An chơi trước. Ở mỗi lượt, người chơi chọn một đồng có số sỏi chia hết cho 3 và chuyển đúng một phần ba số sỏi của đồng đó sang đồng còn lại. Ai không thể thực hiện được lượt chơi của mình sẽ thua cuộc. Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương (a, b) với $a \leq b < 50$ sao cho Bình có chiến lược thắng?

Bài 5. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) , ngoại tiếp (I) . OI cắt BC tại X , X' đối xứng X qua AI . Các điểm Y, Y', Z, Z' định nghĩa tương tự. Chứng minh rằng 3 điểm X', Y', Z' cùng nằm trên một đường thẳng tiếp xúc với đường tròn Euler của tam giác ABC .

Bài 6. Cho số nguyên dương n bất kỳ, tô mỗi điểm trong mặt phẳng bởi một trong n màu. Chứng minh rằng tồn tại một hình vuông có 4 đỉnh cùng màu.

Ngoài phần thưởng như các số khác, Tạp chí sẽ mừng tuổi 100k cho bạn đầu tiên giải được mỗi bài toán.