NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài toán.

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+4y^2+4xy+2x^2y^2=11, \\ 3xy(x+2y)+31=9x+18y+13xy. \end{cases}$$

Ta có 3 cách giải như sau:

Cách 1. Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (x+2y)^2+2x^2y^2=11 \\ 3xy(x+2y)+31=9(x+2y)+13xy \end{cases}$$

Đặt $a=x+2y, b=xy$ ta được hệ mới:

$$\begin{cases} a^2+2b^2=11 \\ 3ab+31=9a+13b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2b^2=11 \quad (1) \\ 3a(b-3)=13b-31 \quad (2) \end{cases}$$

Dễ thấy $b=3$ không thỏa mãn phương trình (2).

Xét $b \neq 3$:

Từ phương trình (2) ta có $a=\dfrac{13b-31}{3(b-3)}$, thay vào phương trình (1) ta được:

$$\left(\frac{13b-31}{3(b-3)}\right)^2+2b^2=11 \Leftrightarrow (13b-31)^2+18b^2(b-3)^2=99(b-3)^2$$

$$\Leftrightarrow 18b^4-108b^3+232b^2-212b+70=0$$

$$\left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=\dfrac{5}{3} \\ b=\dfrac{7}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=3; b=1 \\ a=\dfrac{7}{3}; b=\dfrac{5}{3} \\ a=\dfrac{1}{3}; b=\dfrac{7}{3} \end{array}\right.$$

✦ **TH1:** $a = 3; b = 1 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ (3 - 2y)y = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

✦ **TH2:** $a = \dfrac{7}{3}; b = \dfrac{5}{3} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = \dfrac{7}{3} \\ xy = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{3} - 2y \\ \left(\dfrac{7}{3} - 2y\right) y = \dfrac{5}{3} \end{cases}$

Không tìm được x, y thoả mãn.

✦ **TH3:** $a = \dfrac{1}{3}; b = \dfrac{7}{3} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = \dfrac{1}{3} \\ xy = \dfrac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} - 2y \\ \left(\dfrac{1}{3} - 2y\right) y = \dfrac{7}{3} \end{cases}$

Không tìm được x, y thoả mãn.

Vậy hệ phương trình có các nghiệm $(x; y)$ là $(1; 1)$, $\left(2; \dfrac{1}{2}\right)$.

Cách 2. Hệ phương trình đã cho:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x^2y^2 = 11 \\ 3xy(x + 2y) + 31 = 9x + 18y + 13xy \end{cases}$$

Đặt $a = x + 2y, b = xy$ thì hệ đã cho có thể viết lại thành

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 11 \\ 3ab + 31 = 9a + 13b \end{cases}$$

Cộng hai phương trình và chuyển vế, phân tích nhân tử ta có

$$(a + b - 4)(a + 2b - 5) = 0$$

Từ đây ta có hai trường hợp

✦ **TH1:** Nếu $a+b=4$ thì $a=4-b$ và thay vào phương trình $a^2+2b^2=11$ ta được

$$3b^2-8b+5=0$$

Giải tìm được $b=1, a=3$ và $b=\frac{5}{3}, a=\frac{7}{3}$.

- Nếu $a=3, b=1$ thì

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ x\cdot 2y=2 \end{cases}$$

tìm được (x,y) là $(1,1)$, $\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

- Nếu $a=\frac{7}{3}, b=\frac{5}{3}$ thì

$$\begin{cases} x+2y=\frac{7}{3} \\ x\cdot 2y=\frac{10}{3} \end{cases}$$

không tồn tại x,y thỏa mãn.

✦ **TH2:** Nếu $a+2b=5$ thì $a=5-2b$ và thay vào phương trình $a^2+2b^2=11$ ta được

$$3b^2-10b+7=0$$

Giải tìm được $b=1, a=3$ và $b=\frac{7}{3}, a=\frac{1}{3}$.

- Nếu $a=3, b=1$ thì

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ x\cdot 2y=2 \end{cases}$$

Tìm được các cặp (x,y) là $(1,1)$, $\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

- Nếu $b=\frac{7}{3}, a=\frac{1}{3}$ thì

$$\begin{cases} x+2y=\frac{1}{3} \\ x\cdot 2y=\frac{14}{3} \end{cases}$$

Không tồn tại x, y thoả mãn.

Vậy hệ phương trình có các nghiệm $(x; y)$ là $(1; 1)$, $\left(2; \dfrac{1}{2}\right)$.

Cách 3. Phương trình thứ nhất tương đương với:

$$(x+2y)^2 = 11 - 2x^2y^2$$

Phương trình thứ hai tương đương với:

$$3(x+2y)(xy-3) = 13xy - 31$$

$\Rightarrow 9(x+2y)^2(xy-3)^2 = (13xy-31)^2 \Leftrightarrow -2(3xy-5)(3xy-7)(xy-1)^2 = 0.$

Ta có các trường hợp:

✦ **TH1:** $xy = 1 \Rightarrow 3(x+2y) + 31 = 9(x+2y) + 13 \Rightarrow x = 3 - 2y.$

Khi đó $(3-2y)y = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Thử lại ta thấy hai cặp nghiệm này thỏa mãn hệ phương trình.

✦ **TH2:** $xy = \dfrac{5}{3} \Rightarrow x + 2y = \dfrac{7}{3} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = \dfrac{7}{3} \\ xy = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{3} - 2y \\ \left(\dfrac{7}{3} - 2y\right)y = \dfrac{5}{3} \end{cases}.$

Không tồn tại x, y thoả mãn.

✦ **TH3:** $xy = \dfrac{7}{3} \Rightarrow x + 2y = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = \dfrac{1}{3} \\ xy = \dfrac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} - 2y \\ \left(\dfrac{1}{3} - 2y\right)y = \dfrac{7}{3} \end{cases}.$

Không tồn tại x, y thoả mãn.

Vậy hệ có hai cặp nghiệm $(x; y) = (1; 1)$, $(x; y) = \left(2; \dfrac{1}{2}\right)$.