

MỘT VÀI BÀI TOÁN XÁC SUẤT DÀNH CHO HỌC SINH THCS

I, Lý thuyết

★ Một số định nghĩa:

Với mỗi tập X hữu hạn, kí hiệu $|X|$ là số phần tử của tập hợp X .

1. Phép thử ngẫu nhiên: Phép thử ngẫu nhiên là một hành động mà ta không đoán trước được kết quả của nó, tuy nhiên có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của hành động đó.
2. Không gian mẫu: Tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử T được gọi là không gian mẫu của phép thử T và thường được kí hiệu là Ω .
3. Biến cố: Xét phép thử T có không gian mẫu Ω . Khi đó nếu A là tập con của Ω thì ta nói A là biến cố (liên quan tới phép thử T).

Trong kết quả của việc thực hiện phép thử T , nếu có một phần tử của biến cố xảy ra thì ta nói “biến cố A xảy ra”.

4. Xác suất: Giả sử A là biến cố liên quan tới phép thử T và phép thử T có một số hữu hạn các kết quả có thể, đồng khả năng. Khi đó ta gọi tỉ số $\frac{|A|}{|\Omega|}$ là xác suất của biến cố A và kí hiệu là $P(A)$. Như vậy

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Ta gọi $|A|$ là số kết quả thuận lợi của biến cố A , tức là các kết quả mà A xảy ra.

★ Các bước để giải một bài toán xác suất:

- + Xác định rõ phép thử và tính số phần tử của không gian mẫu.
- + Gọi tên được biến cố và tính được số kết quả thuận lợi cho biến cố.
- + Tính xác suất theo công thức ở trên.

★ Hai quy tắc đếm cơ bản:

- + **Quy tắc nhân:** Một hành động được chia làm nhiều bước thực hiện thì số cách thực hiện hành động này bằng tích số cách của các bước.
- + **Quy tắc cộng:** Một hành động có nhiều phương án thực hiện thì số cách thực hiện hành động này bằng tổng số cách của các phương án.

II, Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho tập hợp $S = \{1; 2; \dots; 20\}$. Chọn ngẫu nhiên hai phần tử của tập hợp S . Tính xác suất để chọn được hai phần tử mà:

- a) Tích hai phần tử đó là số lẻ.
- b) Tích hai phần tử đó là số chẵn.
- c) Tích hai phần tử đó chia hết cho 3.
- d) Tích hai phần tử đó chia hết cho 6.
- e) Tổng bình phương hai phần tử đó chia hết cho 3.
- f) Phần tử này chia hết cho phần tử kia.

Lời giải.

Trước hết ta đếm số cách chọn ngẫu nhiên hai phần tử của tập hợp S .

Phần tử thứ nhất có 20 cách chọn, phần tử thứ hai có 19 cách chọn. Tuy nhiên cách chọn hai phần tử a, b giống cách chọn hai phần tử b, a nên số cách chọn hai phần tử là $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$ cách. Không gian mẫu Ω có 190 phần tử.

Một cách tổng quát, nếu tập hợp S có $n \geq 2$ phần tử thì sẽ có $\frac{n(n-1)}{2}$ cách chọn hai phần tử của S .

- a) Gọi A là biến cố chọn được hai phần tử có tích là số lẻ.

Tích hai phần tử đó là số lẻ khi và chỉ khi cả hai phần tử đều là số lẻ. Có 10 số lẻ nên tương tự như trên, có $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ cách chọn hai phần tử đều là số lẻ. Số

kết quả thuận lợi cho biến cố A là 45.

Xác suất của biến cố A là $\frac{45}{190} = \frac{9}{38}$.

b) Gọi B là biến cố chọn được hai phần tử có tích là số chẵn.

Tích hai phần tử đó là số chẵn khi và chỉ khi hai phần tử được chọn ra có ít nhất một phần tử là số chẵn. Vì có 190 cách chọn hai phần tử tùy ý và 45 cách chọn hai phần tử đều là số lẻ nên có $190 - 45 = 145$ cách chọn hai phần tử trong đó có ít nhất một phần tử là số chẵn. Số kết quả thuận lợi cho biến cố B là 145.

Xác suất của biến cố B là $\frac{145}{190} = \frac{29}{38}$.

Chú ý. Cũng có thể chia trường hợp: có đúng một số chẵn và cả hai số đều chẵn.

c) Gọi C là biến cố chọn được hai phần tử có tích chia hết cho 3.

Tích của hai phần tử chia hết cho 3 khi và chỉ khi trong hai phần tử đó có ít nhất một phần tử chia hết cho 3.

Vì có 14 phần tử không chia hết cho 3 nên có $\frac{14 \cdot 13}{2} = 91$ cách chọn hai phần tử không chia hết cho 3. Suy ra có $190 - 91 = 99$ cách chọn hai phần tử mà có ít nhất một phần tử chia hết cho 3. Số kết quả thuận lợi cho biến cố C là 99.

Xác suất của biến cố C là $\frac{99}{190}$.

d) Gọi D là biến cố chọn được hai phần tử có tích chia hết cho 6.

Ta đếm số cách chọn ra hai phần tử mà tích của chúng chia hết cho 6. Có ba khả năng:

+ Cả hai phần tử chia hết cho 6: vì có 3 số chia hết cho 6 nên có $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ cách chọn hai phần tử đều chia hết cho 6.

+ Có đúng một phần tử chia hết cho 6: có 3 cách chọn ra một phần tử chia hết cho 6 và có 17 cách chọn ra phần tử còn lại không chia hết cho 6. Do đó trong trường hợp này có $3 \cdot 17 = 51$ cách chọn.

+ Cả hai phần tử đều không chia hết cho 6 (phải loại đi các phần tử 6, 12, 18): thế thì phải có một phần tử chia hết cho 2 (có 7 cách chọn) và một phần tử chia hết cho 3 (có 3 cách chọn). Do đó trong trường hợp này có $7 \cdot 3 = 21$ cách chọn.

Suy ra số kết quả thuận lợi cho biến cố D là $3 + 51 + 21 = 75$.

Xác suất của biến cố D là $\frac{75}{190} = \frac{15}{38}$.

e) Gọi E là biến cố chọn được hai phần tử có tổng bình phương chia hết cho 3.

Ta có một kết quả quen thuộc trong số học là nếu $x, y \in \mathbb{Z}$ mà $x^2 + y^2$ chia hết cho 3 thì x, y đều chia hết cho 3.

Như vậy để tổng bình phương hai phần tử chia hết cho 3 thì cả hai phần tử phải cùng chia hết cho 3. Có 6 phần tử chia hết cho 3 nên có $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ cách chọn ra hai phần tử đều chia hết cho 3. Do đó số kết quả thuận lợi cho biến cố E là 15.

Xác suất của biến cố E là $\frac{15}{190} = \frac{3}{38}$.

f) Gọi F là biến cố chọn được hai phần tử mà phần tử này chia hết cho phần tử kia.

Trước hết, cho trước số nguyên dương n và với số nguyên dương $a \leq n$ thì số bội của a trong tập hợp $S = \{1; 2; \dots; n\}$ là $\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$, trong đó $\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá $\frac{n}{a}$. Nếu không tính a thì số bội thực sự của a là $\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor - 1$.

Cho a chạy từ 1 tới 20 thì số bội thực sự của a tương ứng là

$$19, 9, 5, 4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0.$$

Suy ra có

$$19 + 9 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 46$$

cách chọn ra hai phần tử mà phần tử này chia hết cho phần tử kia. Do đó số kết quả thuận lợi cho biến cố F là 46.

Xác suất của biến cố F là $\frac{46}{190} = \frac{23}{95}$.

Ví dụ 2. Cho số nguyên dương $T = 300 \cdot 600 \cdot 900$. Liệt kê tất cả các ước dương của T , sau đó chọn ngẫu nhiên ra một ước. Tính xác suất để chọn được:

a) Là số chính phương.

b) Chia 4 dư 1.

Lời giải.

Trước hết, phân tích số T ra thừa số nguyên tố ta được

$$T = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^6.$$

Mỗi ước dương của T có dạng $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$, trong đó $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ và thỏa mãn $x \leq 7, y \leq 4, z \leq 6$.

Mỗi cách chọn bộ (x, y, z) sẽ cho ta một ước dương.

Vì $x \in \{0; 1; \dots; 7\}$, $y \in \{0; 1; \dots; 4\}$, $z \in \{0; 1; \dots; 6\}$ nên có 8 cách chọn x , 5 cách chọn y , 7 cách chọn z . Do đó T có $8 \cdot 5 \cdot 7 = 280$ ước dương. Suy ra không gian mẫu có 280 phần tử.

Chú ý. Số ước dương của số $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$ là $(x+1)(y+1)(z+1)$.

a) Ước chính phương của số T có dạng $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ với a, b, c là các số tự nhiên chẵn thỏa mãn $a \leq 7, b \leq 4, c \leq 6$.

Tương tự như trên ta có 4 cách chọn a , 3 cách chọn b , 4 cách chọn c . Suy ra có $4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$ ước chính phương.

Gọi A là biến cố chọn được ước chính phương. Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là 48.

Xác suất của biến cố A là $\frac{48}{280} = \frac{6}{35}$.

b) Ước chia 4 dư 1 là ước lẻ nên có dạng $3^m \cdot 5^n$ với m, n là các số tự nhiên thỏa mãn $m \leq 4, n \leq 6$.

Chú ý là $3^m \cdot 5^n \equiv (-1)^m \pmod{4}$ nên để ước chia 4 dư 1 thì m chẵn còn n tùy ý.

Có 3 cách chọn m và 7 cách chọn n nên có $3 \cdot 7 = 21$ ước chia 4 dư 1.

Gọi B là biến cố chọn được ước dương chia 4 dư 1. Số kết quả thuận lợi cho biến cố B là 21.

Xác suất của biến cố B là $\frac{21}{280} = \frac{3}{40}$.

Ví dụ 3. Có ba cặp vợ chồng ngồi ngẫu nhiên vào hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có 3 ghế. Tính xác suất để:

- a) Mỗi cặp vợ chồng đều ngồi đối diện nhau.
- b) Không có cặp vợ chồng nào ngồi đối diện nhau.

Lời giải.

Xếp 6 người vào 6 chiếc ghế thì có $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ cách xếp. Không gian mẫu có 720 phần tử.

- a) Gọi A là biến cố mỗi cặp vợ chồng đều ngồi đối diện nhau.

Xếp cặp vợ chồng đầu tiên: có 3 vị trí chọn chỗ ngồi và có 2 cách đảo vị trí chồng-vợ nên có $3 \cdot 2 = 6$ cách.

Tương tự, xếp cặp vợ chồng thứ hai có $2 \cdot 2 = 4$ cách, xếp cặp vợ chồng thứ ba có $1 \cdot 2 = 2$ cách.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$.

Xác suất của biến cố A là $\frac{48}{720} = \frac{1}{15}$.

- b) Trước hết, ta đếm số cách sắp xếp ba cặp vợ chồng mà có ít nhất một cặp vợ chồng ngồi đối diện nhau. Lưu ý là nếu có hai cặp vợ chồng ngồi đối diện nhau thì cặp còn lại cũng ngồi đối diện nhau. Điều này có nghĩa là chỉ có hai khả năng:

+ Mỗi cặp vợ chồng đều ngồi đối diện nhau: theo a) thì số cách sắp xếp là 48.

+ Có đúng một cặp vợ chồng ngồi đối diện nhau:

Chọn ra một cặp vợ chồng ngồi đối diện nhau có 3 cách chọn. Sắp xếp cặp vợ chồng này ngồi đối diện nhau có 6 cách xếp (theo ý a)). Như vậy có $3 \cdot 6 = 18$ cách xếp một cặp vợ chồng ngồi đối diện nhau.

Hai cặp vợ chồng còn lại không cặp nào ngồi đối diện nhau. Ta đếm bằng cách loại trừ: xếp 4 người một cách tùy ý có $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ cách, loại đi các cách xếp mà có cặp vợ chồng ngồi đối diện nhau (có 8 cách), tức là có $24 - 8 = 16$ cách xếp hai cặp vợ chồng còn lại mà không có cặp nào ngồi đối diện nhau.

Trong trường hợp này có $18 \cdot 16 = 288$ cách xếp.

Như vậy có $48 + 288 = 336$ cách xếp ba cặp vợ chồng mà có ít nhất một cặp vợ chồng ngồi đối diện nhau.

Suy ra có $720 - 336 = 384$ cách xếp ba cặp vợ chồng mà không có cặp vợ chồng nào ngồi đối diện nhau.

Gọi B là biến cố không có cặp vợ chồng nào ngồi đối diện nhau thì số kết quả thuận lợi cho biến cố B là 384.

Xác suất của biến cố B là $\frac{384}{720} = \frac{8}{15}$.

Chú ý. Khi một cặp vợ chồng ngồi đối diện nhau, ta có thể coi một cặp vợ chồng đây là một người.

Ví dụ 4. Lúc đầu, An đứng ở ô số 1. An thực hiện liên tiếp bốn bước nhảy, mỗi bước sẽ nhảy ngẫu nhiên vào một ô trống trong ba ô còn lại. Hãy tính xác suất để sau bốn bước nhảy, An sẽ trở lại ô số 1.

1	2
3	4

Lời giải.

Mỗi bước An có 3 lựa chọn nhảy nên số cách nhảy của bốn bước là $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ cách. Không gian mẫu có 81 phần tử.

Gọi A là biến cố mà sau bốn bước nhảy, An đứng ở ô số 1.

Xét dãy các ô mà An nhảy trong bốn bước như sau: $1 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 1$.

Chú ý là hai ô A, C khác ô 1. Xét hai khả năng:

+ B là ô 1: có 3 cách chọn ô A và 3 cách chọn ô C nên trong trường hợp này có $3 \cdot 3 = 9$ cách nhảy.

+ B khác ô 1: có 3 cách chọn ô A , 2 cách chọn ô B và 2 cách chọn ô C nên trong trường hợp này có $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ cách nhảy.

Như vậy số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $9 + 12 = 21$.

Xác suất của biến cố A là $\frac{21}{81} = \frac{7}{27}$.

Ví dụ 5. Điền ngẫu nhiên vào mỗi ô vuông của bảng 3×3 một trong ba số $-1, 0, 1$. Tính xác suất để:

- Tổng các số được điền trong mỗi hàng đều bằng 0.
- Tổng các số được điền trong mỗi hàng và trong mỗi cột đều bằng 0.

Lời giải.

Mỗi ô vuông có một trong ba cách điền nên số phần tử của không gian mẫu là 3^9 .

a) Để tổng các số được điền trong mỗi hàng đều bằng 0 thì mỗi hàng chứa ba số $-1, 0, 1$ hoặc hàng đó chứa toàn số 0.

Số cách điền ba số $-1, 0, 1$ này vào ba ô trên một hàng là $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Số cách điền ba số 0 vào ba ô trên một hàng là 1. Vì thế có 7 cách điền các số vào một hàng sao cho tổng các số ở hàng đó bằng 0.

Suy ra có $7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$ cách điền các số vào bảng để tổng các số ở mỗi hàng đều bằng 0.

Xác suất cần tìm là $\frac{7^3}{3^9} = 1,74\%$.

b) Tương tự như trên thì mỗi hàng chứa ba số $-1, 0, 1$ hoặc chứa toàn số 0 và mỗi cột cũng chỉ chứa ba số $-1, 0, 1$ hoặc chứa toàn số 0 .

+ Nếu không có hàng nào chứa toàn số 0 thì với mỗi cách điền số ở hàng đầu tiên, có đúng hai cách điền số ở hàng thứ hai và một cách điền số ở hàng thứ ba. Do đó số cách điền số để tổng mỗi hàng và mỗi cột đều bằng 0 là $6 \cdot 2 \cdot 1 = 12$.

+ Nếu có đúng một hàng chứa toàn số 0 , giả sử là hàng đầu tiên thì với mỗi cách điền số ở hàng thứ hai có đúng một cách điền số ở hàng thứ ba. Số cách điền trong trường hợp này là $6 \cdot 3 = 18$.

+ Nếu có hai hàng chứa toàn số 0 thì toàn bộ bảng là 0 . Số cách điền trong trường hợp này là 1 .

Vậy xác suất cần tìm là: $\frac{12 + 18 + 1}{3^9} \approx 0,157\%$.

III, Bài tập tự luyện

Bài 1. Có ba cặp vợ chồng ngồi ngẫu nhiên vào một dãy 6 ghế hàng ngang. Tính xác suất để:

- Mỗi cặp vợ chồng đều ngồi cạnh nhau.
- Có đúng hai cặp vợ chồng mà chồng ngồi cạnh vợ.
- Không có cặp vợ chồng nào mà chồng ngồi cạnh vợ.

Bài 2. Điền ngẫu nhiên vào mỗi ô vuông của bảng 3×3 một trong ba số $-1, 0, 1$. Tính xác suất để tổng các số được điền trong mỗi hàng, trong mỗi cột và trong mỗi đường chéo chính đều bằng 0 .

Bài 3. Ba bạn Phúc, Lộc, Thọ lần lượt viết lên bảng các số tự nhiên từ 1 tới 9 sao cho số người sau viết không trùng với số người trước viết. Tính xác suất để số bạn Phúc viết chia hết cho số bạn Lộc viết và số bạn Lộc viết chia hết cho số bạn Phúc viết.

Bài 4. Một robot di chuyển trên một bảng 7 ô vuông được đánh số từ 1 đến 7 . Ban đầu robot đứng ở ô số 4 . Mỗi bước, nó có thể nhảy sang trái hoặc sang

phải, mỗi hướng có xác suất bằng nhau và mỗi lần nhảy chỉ di chuyển đúng một ô. Tại ô số 1 và ô số 7 có đặt kẹo và khi robot đến một trong hai ô này, nó lấy kẹo và dừng lại. Tính xác suất để robot lấy kẹo sau đúng 3 bước.

Bài 5. Tô màu mỗi đỉnh của hình vuông $ABCD$ bởi một trong ba màu: xanh, đỏ, vàng. Tính xác suất để không có hai đỉnh kề nhau nào được tô cùng màu.

Bài 6. Chọn ngẫu nhiên ba đỉnh của một đa giác đều 12 đỉnh. Tính xác suất để ba đỉnh đó là ba đỉnh của một tam giác:

- a) vuông
- b) tù
- c) nhọn
- d) cân
- e) đều.