

MỘT SỐ "MẸO" BIẾN ĐỔI KHI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Phương trình lượng giác là một trong những nội dung quan trọng và xuyên suốt trong chương trình Toán trung học phổ thông, đồng thời cũng thường xuyên xuất hiện trong các kì thi quan trọng. Tuy nhiên, đối với nhiều học sinh, việc giải phương trình lượng giác vẫn là một khó khăn không nhỏ, không phải vì phép biến đổi phức tạp mà chủ yếu do chưa nắm vững các hướng biến đổi phù hợp và các kỹ thuật xử lý quen thuộc.

Thực tế cho thấy, rất nhiều phương trình lượng giác tưởng chừng rắc rối lại có thể được giải quyết một cách gọn gàng nếu biết cách đưa về dạng thích hợp, khai thác các đẳng thức lượng giác cơ bản, hoặc biến đổi về phương trình tích. Ngược lại, nếu thiếu định hướng ngay từ đầu, người học dễ rơi vào tình trạng biến đổi dài dòng, phức tạp hoặc đi vào ngõ cụt.

Xuất phát từ những lí do đó, bài viết này nhằm hệ thống lại một số điểm cần chú ý khi giải phương trình lượng giác, đặc biệt là các kỹ thuật biến đổi thường gặp và hiệu quả. Thông qua các ví dụ minh họa cụ thể kèm lời giải chi tiết, bài viết giúp người đọc nhận diện được hướng giải phù hợp cho từng dạng toán. Cuối bài là một số bài tập tự luyện để bạn đọc có thể củng cố và vận dụng những kiến thức đã trình bày.

Hy vọng rằng tài liệu này sẽ là một nguồn tham khảo hữu ích, giúp học sinh tiếp cận phương trình lượng giác một cách chủ động, logic và hiệu quả hơn.

Khi gặp một bài toán giải phương trình lượng giác, chúng ta có các hướng biến đổi sau:

1. Đưa về phương trình bậc nhất đối với sin và cosin

Với dạng này ta cần lưu ý một số biến đổi sau

$$\sin x \pm \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left(x \pm \frac{\pi}{3} \right) = 2 \cos \left(x \mp \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \sin x \pm \cos x &= 2 \sin \left(x \pm \frac{\pi}{6} \right) = 2 \cos \left(x \mp \frac{\pi}{3} \right) \\ \sin x \pm \cos x &= \sqrt{2} \sin \left(x \pm \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(x \mp \frac{\pi}{4} \right)\end{aligned}$$

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2 \sin 2x. \quad (1)$$

Lời giải. Ta có

$$\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2 \sin \left(3x - \frac{\pi}{3} \right).$$

$$\text{Nên PT (1)} \Leftrightarrow \sin \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) = \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{15} + k\frac{2\pi}{5} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$$

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{3}{2} \sin x + \frac{1}{2} \sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x = 2 \cos 4x + \frac{3}{2} \sin x - \frac{1}{2} \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x = 2 \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) = \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{11\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7} \end{cases} \quad \square$$

2. Biến đổi về phương trình chỉ chứa một hàm số lượng giác

Với phương pháp này chúng ta cần lưu ý tới một số đẳng thức sau

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x;$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x;$$

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}; \quad \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}.$$

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$\frac{2(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2 \sin x} = 0. \quad (3)$$

Lời giải. Điều kiện $\sin x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{PT (3)} \Leftrightarrow 2 \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \right) - \frac{1}{2} \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \sin^2 2x + \sin 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Đối chiếu điều kiện ta có $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, n \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của PT đã cho. $\square$

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$\sin^2 2x \cos 6x + \sin^2 3x = \frac{1}{2} - \sin \frac{11x}{2} \sin \frac{9x}{2}. \quad (4)$$

Lời giải. Ta có

$$\text{PT (4)} \Leftrightarrow (1 - \cos 4x) \cos 6x + 1 - \cos 6x = \sin \frac{11x}{2} \sin \frac{9x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos 4x \cos 6x = \sin \frac{11x}{2} \sin \frac{9x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 10x) = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 10x)$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + \cos x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$\tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = 5 \sin^2 x + 1. \quad (5)$$

Lời giải. Điều kiện $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi$.

$$\text{PT (5)} \Leftrightarrow \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \frac{6 \tan^2 x + 1}{1 + \tan^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \tan x(7 \tan^2 x + 5 \tan x + 2) = 0 \Leftrightarrow \tan x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

Ví dụ 6. Giải phương trình

$$5 \sin x - 2 = 3(1 - \sin x) \tan^2 x. \quad (6)$$

Lời giải. Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

$$\text{PT (6)} \Leftrightarrow 5 \sin x - 2 = 3(1 - \sin x) \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 5 \sin x - 2 = 3(1 - \sin x) \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$$

$$\Leftrightarrow (5 \sin x - 2)(1 + \sin x) = 3 \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Cả hai họ nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện nên là hai họ nghiệm của PT (5). $\square$

Ví dụ 7. Giải phương trình

$$\sqrt{3}(\sin 2x + \sin x) + \cos 2x - \cos x = 2. \quad (7)$$

Lời giải.

$$\text{PT (7)} \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

3. Biến đổi về phương trình tích

Để biến đổi về phương trình tích, chúng ta cần tạo ra các thừa số chung. Một số lưu ý khi tìm nhân tử chung: Các biểu thức

- $1 + \sin 2x$; $\cos 2x$; $1 + \tan x$; $1 + \cot x$ có thừa số chung là $\sin x + \cos x$.
- $1 - \sin 2x$; $\cos 2x$; $1 - \tan x$; $1 - \cot x$ có thừa số chung là $\cos x - \sin x$.
- $\sin^2 x$; $\tan^2 x$ có thừa số chung là $(1 - \cos x)(1 + \cos x)$.
- $\cos^2 x$; $\cot^2 x$ có thừa số chung là $(1 - \sin x)(1 + \sin x)$.

Ví dụ 8. Giải phương trình

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (8)$$

Lời giải. Ta có

$$\text{PT (7)} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

Ví dụ 9. Giải phương trình

$$\cos 2x - 3 \sin 2x + 5\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{9\pi}{4} \right) = 3. \quad (9)$$

Lời giải. Ta có

$$\text{PT (9)} \Leftrightarrow \cos 2x - 3(1 + \sin 2x) + 5(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) - 3(\sin x + \cos x)^2 + 5(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(4 \sin x + 2 \cos x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(Do $4^2 + 2^2 < 5^2$ nên PT $4 \sin x + 2 \cos x - 5 = 0$ vô nghiệm). $\square$

Ví dụ 10. Giải phương trình

$$\sin^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0. \quad (10)$$

Lời giải. Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

$$\text{PT (10)} \Leftrightarrow \left(1 - \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right) \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - (1 + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x) \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} - (1 + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x} - (1 + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos^2 x) - (1 + \cos x)(1 + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \cos x)(\cos x + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin x + \cos x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết hợp điều kiện ta có

$$\begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

là tất cả các nghiệm của phương trình. $\square$

Ví dụ 11. Giải phương trình

$$\frac{\tan^2 x + \tan x}{\tan^2 x + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right). \quad (11)$$

Lời giải. Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có PT (11) tương đương với

$$\cos^2 x (\tan^2 x + \tan x) = \frac{1}{2} (\sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin^2 x + \sin x \cos x) = \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2 \sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Cả ba họ nghiệm này đều thỏa điều kiện bài toán. $\square$

Ví dụ 12. Giải phương trình

$$2 \sin 2x - \cos 2x = 7 \sin x + 2 \cos x - 4. \quad (12)$$

Lời giải. Phương trình (12) tương đương với

$$4 \sin x \cos x - 1 + 2 \sin^2 x - 7 \sin x - 2 \cos x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x (2 \sin x - 1) + (2 \sin x - 1)(\sin x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \sin x - 1)(2 \cos x + \sin x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(Vì $2 \cos x + \sin x \leq \sqrt{5} < 3$ nên $2 \cos x + \sin x - 3 \neq 0$ với mọi x). $\square$

Một số bài toán giải phương trình lượng giác cho mọi người luyện tập:

- 1) $\cot x + \sin x \left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2}\right) = 4;$
- 2) $\frac{(1 - 2 \sin x) \cos x}{(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3};$
- 3) $\sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cos 2x - \sin x = 0;$
- 4) $3 \cot^2 x + 2\sqrt{2} \sin^2 x = (2 + 3\sqrt{2}) \cos x;$
- 5) $\frac{\cos^2 x (\cos x - 1)}{\sin x + \cos x} = 2(1 + \sin x);$
- 6) $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0;$
- 7) $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sin \left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0;$
- 8) $\sin^6 x + \cos^6 x = \sin 2x;$
- 9) $\cot x - \tan x + 4 \sin 2x = \frac{2}{\sin 2x};$
- 10) $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0.$