

# MIT Integration Bee: Khi Giải Toán Trở Thành Một Môn Thể Thao Đối Kháng

Nếu bạn nghĩ toán học chỉ là những con số khô khan trên trang giấy, hãy một lần xem vòng Chung kết của MIT Integration Bee. Tại đại sảnh của Học viện Công nghệ Massachusetts (MIT), toán học không còn là lý thuyết thuần túy; nó trở thành một cuộc đua nghệt thở, nơi ranh giới giữa thiên tài và áp lực chỉ cách nhau một viên phấn.

## 1. Nguồn gốc

Ra đời từ năm 1981 bởi Andy Bernoff (một sinh viên MIT thời đó), cuộc thi đã vượt xa khuôn khổ một câu lạc bộ học thuật để trở thành biểu tượng văn hóa của giới toán học toàn cầu. Kỳ thi diễn ra vào tháng 1 hàng năm, biến những ngày đông giá rét tại Cambridge thành những cuộc đối đầu rực lửa trên bảng đen.

## 2. Hành trình đến ngôi vị "Grand Integrator"

Để chạm tay vào chiếc mũ phù thủy huyền thoại, các thí sinh phải vượt qua một lộ trình khắc nghiệt:

- **Vòng loại (Qualifiers):** Hàng trăm sinh viên (cả đại học và cao học) thực hiện bài thi viết gồm 20 bài tích phân trong 20 phút. Chỉ những người có tốc độ "nhanh như điện" mới lọt vào top 16.
- **Vòng đấu bảng & Đối đầu (The Battle):** Các thí sinh được chia cặp, đứng trước toàn thể khán giả và giải cùng một đề bài. Áp lực từ tiếng hò reo, tiếng thở phào của đối thủ và tiếng phấn rít trên bảng tạo nên một bầu không khí đặc quánh sự căng thẳng.
- **Chung kết (The Finals):** Hai "quái kiệt" cuối cùng sẽ đấu theo thể thức đối kháng trực tiếp. Chỉ cần một sai sót nhỏ ở một hằng số  $C$  hay một dấu trừ, chiến thắng sẽ tuột khỏi tầm tay.

## 3. Nghệ thuật xử lý và các kỹ thuật biến đổi

Đối với những bạn tham gia kỳ thi này, nắm chắc những công thức tích phân cơ bản trong sách giáo khoa chỉ là điều kiện cần, và chắc chắn là chưa đủ. Để thực sự

làm chủ cuộc chơi, các thí sinh phải đạt đến trình độ thượng thừa trong việc vận dụng các kỹ thuật biến đổi mà đôi khi người học bình thường chưa từng nghe tới:

- Kỹ thuật Feynman (Leibniz Integral Rule)
- Phép thế Weierstrass (The "Sneaky" Substitution)
- Khai thác tính đối xứng và hàm đặc biệt
- Biến đổi Euler và tích phân Dirichlet

#### 4. Những sự thật thú vị

- Phần thưởng cho nhà vô địch không phải là một chiếc cúp mạ vàng, mà là một chiếc mũ phù thủy (wizard hat). Nó tượng trưng cho việc người thắng cuộc đã làm chủ được "ma thuật" của những con số.
- Đôi khi ban tổ chức đưa ra những bài toán mà nhìn sơ qua có vẻ không có nguyên hàm sơ cấp, buộc thí sinh phải dùng các hàm đặc biệt như hàm Gamma ( $\Gamma$ ) hoặc hàm Zeta ( $\zeta$ ).
- Dù chỉ dành cho sinh viên MIT, nhưng sức ảnh hưởng của giải đấu đã lan tỏa đến mức các trường đại học hàng đầu khác như Stanford, UChicago hay ngay cả các trường chuyên tại Việt Nam cũng tổ chức các phiên bản "Bee" tương tự.

#### 5. Vẻ đẹp của tư duy thuần túy

Sức hấp dẫn của MIT Integration Bee nằm ở chỗ nó tôn vinh tư duy thuần túy. Trong thời đại của máy tính và AI, việc một con người có thể giải quyết những cấu trúc toán học siêu việt chỉ bằng trí tuệ và một viên phấn là một lời khẳng định mạnh mẽ về giới hạn của bộ não nhân loại.

**MIT Integration Bee 2026 - Qualifying Exam***Thời gian: 20 phút cho 20 câu***Bài 1**

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2025}(x) \cos^{2026}(x) dx$$

**Bài 2**

$$\int e^{2026e^x+x} dx$$

**Bài 3**

$$\int_0^{2026} \left\{ \frac{\lfloor x \rfloor}{3} \right\} dx$$

**Bài 4**

$$\int_{-1}^1 \underbrace{|x + |x + \dots + |x + |x|| \dots ||}_{2026 \text{ x's}} dx$$

**Bài 5**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$$

**Bài 6**

$$\int \sqrt{1 + \cosh(x)} dx$$

**Bài 7**

$$\int \frac{2^{\log(x)}}{x^2} dx$$

**Bài 8**

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=2}^{\infty} x^n \right) dx$$

**Bài 9**

$$\int x^2 \sin(x) dx$$

**Bài 10**

$$\int \frac{(x-1)^2}{2e^x + x^2 + 1} dx$$

Bài 11

$$\int_{-1}^1 \max\left(0, \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\right) dx$$

Bài 12

$$\int_0^1 \sqrt{x^2 + x + \sqrt{x^2 + x + \sqrt{\dots}}} dx$$

Bài 13

$$\int (\cos^5(x) - 10 \cos^3(x) \sin^2(x) + 5 \cos(x) \sin^4(x)) dx$$

Bài 14

$$\int \arctan(\sqrt{x}) dx$$

Bài 15

$$\int_0^{1000} (\lfloor [x] \rfloor + \lceil [x] \rceil + \lfloor \{x\} \rfloor + \lceil \{x\} \rceil + \lfloor [x] \rfloor + \lceil [x] \rceil) dx$$

Bài 16

$$\int \sqrt{\frac{\cos(x) \cot(x) \csc(x)}{\sin(x) \tan(x) \sec(x)}} dx$$

Bài 17

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{1 + e^{2x}} dx$$

Bài 18

$$\int \left( \frac{\sin^2(x)}{x^2} - \frac{\sin(2x)}{x} \right) dx$$

Bài 19

$$\int \frac{\log(\log(x)) \log(\log(\log(x)))}{x \log(x)} dx$$

Bài 20

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \cos^2(x) \right) \right) dx$$

**Đáp số**

1. 0

2.  $\frac{e^{2026e^x}}{2026}$

3. 675

4. 1013

5.  $\frac{1}{3} \left( (x+1)^{3/2} + (x-1)^{3/2} \right)$

6.  $2\sqrt{2} \sinh(x/2)$

7.  $\frac{x^{\log(2)-1}}{\log(2)-1}$

8.  $\log(2) - \frac{5}{8}$

9.  $2x \sin(x) - (x^2 - 2) \cos(x)$

10.  $x - \log(2e^x + x^2 + 1)$

11.  $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

12.  $\frac{3}{2}$

13.  $\frac{1}{5} \sin(5x)$

14.  $(x+1) \arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x}$

15. 1001000

16.  $-x - \cot(x)$

17.  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

18.  $-\frac{\sin^2(x)}{x}$

19.  $\frac{1}{4} \log(\log(x))^2 (2 \log(\log(\log(x)))) - 1)$

20.  $\frac{\pi}{4}$

# MIT Integration Bee 2026 - Regular Season

(Time limit per integral: 2 minutes)

## Regular Season Problem 1

$$\int_0^{2026} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2026k+2025}}{k!} \right) dx$$

## Regular Season Problem 2

$$\int_0^{\log(34)} \left( 2 + \frac{1}{2e^x - 1} + \frac{1}{3e^x - 1} \right) dx$$

## Regular Season Problem 3

$$\int_0^{1/2} \left( \cos(\pi x) - \pi \left( \frac{1}{4} - x^2 \right) \left( \frac{5}{4} - x^2 \right) \right) dx$$

## Regular Season Problem 4

$$\int_{\int_0^1 x dx}^1 x dx \int_0^{\int_0^1 x dx} x dx \int_0^{\int_0^1 x dx} x dx$$

## Regular Season Problem 5

$$\int \frac{4x^2 - 1}{x^2(x^2 - 1)} dx$$

## Regular Season Problem 6

$$\int \frac{dx}{27x - x^{-1/3}}$$

## Regular Season Problem 7

$$\int_0^1 \frac{dx}{(e^{2\pi x} - 1)(e^{2\pi(1-x)} - 1)}$$

## Regular Season Problem 8

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x)}{|\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x)|} dx$$

## Regular Season Problem 9

$$\int_0^\pi \frac{|\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x)|}{\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x)} dx$$

## Regular Season Problem 10

$$\int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{e^{2x-x^2}}} dx$$

## Regular Season Problem 11

$$\int_0^{2026} \left\{ x + \frac{1}{2} \lfloor x^2 \rfloor + \frac{1}{3} \lfloor x^3 \rfloor + \frac{1}{4} \lfloor x^4 \rfloor + \dots \right\} dx$$

## Regular Season Problem 12

$$\int_{1/2}^2 \frac{x^8}{x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1} dx$$

## Regular Season Problem 13

$$\int (\operatorname{arcsinh}(x))^2 dx$$

## Regular Season Problem 14

$$\int \cos^2(2026x) \cos(1013x) dx$$

## Regular Season Problem 15

$$\int e^x \arcsin(\tanh(x)) dx$$

## Regular Season Problem 16

$$\int \frac{x((1-x^2)\cos(x) + 2x\sin(x))}{(1+x^2)^2} dx$$

**Regular Season Problem 17**

$$\int_0^1 \sin((x-1)(5x-1)) \sin(x(3x-2)) dx$$

**Regular Season Problem 18**

$$\int_{1/4}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x \left( x^{x^{\dots}} \log(x) - 1 \right)}$$

**Regular Season Problem 19**

$$\int_0^1 \frac{1 + ((2026 + 2x - x^2)^2 - 2) (2026 + 4x - 4x^2)^2}{(2025 + 2x - x^2)(2027 + 2x - x^2)(2025 + 4x - 4x^2)(2027 + 4x - 4x^2)} dx$$

**Regular Season Problem 20**

$$\int_{1/2}^1 4^{x-1} \left( 1 + 4^{4^{x-1}-1} \left( 1 + 4^{4^{4^{x-1}-1}-1} (1 + \dots) \right) \right) dx$$

## Đáp số

1.  $\frac{e^{2026^{2026}} - 1}{2026}$
2.  $\log\left(\frac{6767}{2}\right)$
3.  $\frac{1}{\pi} - \frac{\pi}{10}$
4.  $-\frac{189}{2048}$
5.  $-\frac{1}{x} + \frac{3}{2} \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
6.  $\frac{1}{9} \log\left|27x^{4/3} - 1\right|$
7.  $\frac{1}{12}$
8.  $\frac{\pi}{5}$
9.  $\frac{2\pi}{5}$
10.  $\arcsin\left(\frac{1}{e}\right)$
11. 1013
12.  $\frac{33}{16}$
13.  $x(\operatorname{arcsinh}(x))^2 - 2 \operatorname{arcsinh}(x)\sqrt{1+x^2} + 2x$
14.  $\frac{\sin(1013x)}{2026} + \frac{\sin(3039x)}{12156} + \frac{\sin(5065x)}{20260}$
15.  $e^x \arcsin(\tanh(x)) - \log(e^{2x} + 1)$
16.  $-\frac{\cos(x) + x \sin(x)}{1+x^2}$
17. 0
18.  $-\frac{3}{2}$
19. 1
20.  $\frac{1}{2(\log(4) - 1)}$

## MIT Integration Bee 2026 - Finals

*(Time limit per integral: 5 minutes)*

Bài 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{nx^2 + kx + n} \right) dx$$

Bài 2

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[4]{x^3+x}}$$

Bài 3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2026} \underbrace{\log_{\sqrt{2}} \left( x + \log_{\sqrt{2}} \left( x + \cdots \log_{\sqrt{2}} \left( x + 2026 \right) \cdots \right) \right)}_{n \text{ logs}} dx$$

Bài 4

$$\int_0^{1/4} \left( \left| \sqrt[4]{\frac{1}{x}} - 4 \right|^2 + \left| \sqrt[4]{\frac{1}{x}} - 4 \right| \right) dx$$

Bài 5

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \left( \frac{1}{x-2} + \frac{3}{x-4} + \frac{5}{x-6} \right)^{-2} + 1 \right)^{-1} dx$$

## Đáp số

1.  $\frac{5\pi^2}{72}$

2.

$$\frac{1}{4\sqrt[4]{2}} \left( \log \left( \frac{x+1 - \sqrt[4]{8x^3+8x}}{x+1 + \sqrt[4]{8x^3+8x}} \right) + 2 \arctan \left( \frac{\sqrt[4]{8x^3+8x}}{x+1} \right) \right)$$

3.  $44806 - \frac{4088}{\log(2)}$

4.  $\frac{3}{4}$

5.  $9\pi$

Tập chí Tri Thức Trẻ

## Bài 1.

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sum_{k=1}^n \frac{1}{nx^2 + kx + n} dx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x^2 + \frac{k}{n}x + 1} dx \\
&= \int_0^1 \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x^2 + \frac{k}{n}x + 1} \right) dx \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{x^2 + xy + 1} dy dx \\
&= \int_0^1 \left[ \frac{\ln(x^2 + xy + 1)}{x} \right]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \int_0^1 \frac{\ln(x^2 + x + 1) - \ln(x^2 + 1)}{x} dx \\
&= \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right)}{x} dx - \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx \\
&= \int_0^1 \frac{\ln(1-x^3)}{x} dx - \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx - \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} du - \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln(1+v)}{v} dv \\
&= \frac{1}{3}(-\zeta(2)) - (-\zeta(2)) - \frac{1}{2}(\eta(2)) \\
&= \frac{2}{3}\zeta(2) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}\zeta(2) \right) \\
&= \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) \zeta(2) \\
&= \frac{5}{12} \cdot \frac{\pi^2}{6} \\
&= \frac{5\pi^2}{72}
\end{aligned}$$

còn tiếp...